

1. Основания статистической физики

1.1. Классическая механика. Функция распределения

Теорема Лиувилля: фазовый объём сохраняется $d\Gamma(t) = \prod_i dq_i dp_i = d\Gamma(0) \Leftrightarrow$ фазовые точки движутся подобно несжимаемой жидкости $\Leftrightarrow$ **функция распределения** постоянна вдоль фазовых траекторий¹ $\rho(q, p, t) = \rho(q', p', t')$ [§1.4 в [1]]. Из неё следует **уравнение Лиувилля**:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \{H, \rho\}, \quad (1)$$

где $\{A, B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i} \right)$ — скобка Пуассона. В ТД равновесии ρ и H не зависят явно от времени, поэтому уравнение принимает вид $\{H, \rho\} = 0$, т.е. ρ — интеграл движения. Для покоящегося макроскопического тела он может зависеть только от энергии [§4 в [2]], [§1.5 в [1]].

1.2. Квантовая механика. Матрица плотности

При каноническом квантовании [Лекция 2 в [3]] классические величины заменяются операторами, а скобка Пуассона соответствует коммутатор: $[\hat{A}, \hat{B}]/(i\hbar)$. Уравнение Лиувилля превращается в **уравнение фон Неймана** на **матрицу плотности** $\hat{\rho}$:

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]. \quad (2)$$

Отступление. В квантовой механике **чистое состояние** задаётся кет-вектором $|\psi\rangle$, матрица плотности этого состояния есть $|\psi\rangle\langle\psi|$. Например, состоянию $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ соответствует матрица плотности $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, а равной суперпозиции $\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ соответствует $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Диагональные элементы — **населённости базисных состояний** (вероятности найти систему в базисных состояниях). Наличие недиагональных элементов матрицы плотности означает фазовую когерентность между базисными состояниями.

Формализм матриц плотности позволяет рассматривать **смешанные состояния**, когда фазовая когерентность неизвестна либо несущественна для описания системы. Равная смесь $|\uparrow\rangle$ и $|\downarrow\rangle$ описывается матрицей плотности $\frac{1}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Смешанные состояния не описываются никаким кет-вектором (или волновой функцией).

Матрица плотности может быть разложена по собственному базису (она эрмитова). В равновесии $[\hat{H}, \hat{\rho}] = 0$, поэтому можно выбрать общий собственный базис $\hat{H}$ и $\hat{\rho}$.

$$\hat{\rho} = \sum_a \rho_a |a\rangle\langle a|, \quad \hat{H}|a\rangle = \mathcal{E}_a |a\rangle \quad (3)$$

1.3. Усреднение по ансамблю

Статистический ансамбль — совокупность систем в разных **микросостояниях**, соответствующих одному **макросостоянию**. **Среднее** по ансамблю A от величины $\mathcal{A}$:

$$A = \langle \mathcal{A} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\mathcal{A}}) = \sum_a \rho_a \langle a | \hat{\mathcal{A}} | a \rangle = \sum_a \rho_a \mathcal{A}_a \rightarrow \int d\Gamma \rho(q, p) \mathcal{A}(q, p). \quad (4)$$

Эргодическая гипотеза: средние по времени равны средним по ансамблю².

¹Здесь $q = \{q_i\}$ и $p = \{p_i\}$.

²Подробнее про классическую эргодичность см. [Прил. А.1 в [1]]; про квантовую эргодичность в смысле гипотезы термализации собственных состояний (ETH) см. обзор [4].

2. Энтропия и температура

Для независимых подсистем матрица плотности факторизуется, $\hat{\rho}_{12} = \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2$, поэтому $\ln \hat{\rho}$ является аддитивной величиной. Естественно рассмотреть её среднее, что приводит к энтропии [§7 в [2]], [§1.11 в [1]]

$$S = -\langle \ln \hat{\rho} \rangle. \quad (5)$$

Температура T (в энергетических единицах³) вводится по формуле [§9 в [2]]

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{V,N} = \frac{1}{T} = \beta. \quad (6)$$

3. Микроканонический ансамбль (E, V, N) . Квантовый случай

Соответствует изолированной системе с фиксированными E, V и N .

Для микроканонического ансамбля все доступные микросостояния считаются равновероятными [§6 в [2]], [§§1.5, 1.9 в [1]]⁴:

$$\rho_a = \frac{1}{W(E, V, N)}, \quad (7)$$

где $W(E, V, N)$ — **статистический вес** макросостояния, т.е. число микросостояний с фиксированными E, V и N .

Энтропия в микроканоническом ансамбле вычисляется по знаменитой формуле Больцмана.

$$S = - \sum_a \frac{1}{W} \ln \frac{1}{W} = \ln W \quad (8)$$

4. Система двухуровневых частиц (задача)

Рассмотрим систему из N невзаимодействующих *различных*⁵ частиц, каждая из которых может находиться в одном из двух состояний, отделённых щелью ε (энергию основного состояния удобно считать нулевой)⁶. Каждое микросостояние характеризуется набором чисел: $a = \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$, где $n_i \in \{0, 1\}$, а энергия макросостояния равна $E = N_1 \varepsilon$, где $N_1 = \sum_{i=1}^N n_i$ — число частиц в возбуждённом состоянии (номер энергетического уровня системы в целом).

Для расчёта ТД свойств в микроканоническом ансамбле нужно вычислить статвес W . В квантовой статистике это вычисление обычно представляет собой комбинаторную задачу. Кратность вырождения N_1 -го уровня системы есть число способов взять N_1 из N , т.е. число сочетаний:

$$W(E, N) = \frac{N!}{(N - N_1)! N_1!}. \quad (9)$$

$$\beta = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_N = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial S}{\partial N_1} \right)_N \quad (10)$$

³Переход к температуре в кельвинах делается заменой $T \rightarrow k_B T^\circ$, $S \rightarrow S_B/k_B$.

⁴Более корректной является формула в операторном виде $\hat{\rho} = \Delta(\hat{H} - E)/W(E, V, N)$, где $\Delta(x)$ равна 1 на малом интервале $0 \leq x \leq \Delta E$ и 0 иначе. Здесь под фиксированной энергией E понимается узкий интервал $E \leq E_a \leq E + \Delta E$. Для макроскопического тела ΔE может быть мало в ТД масштабе, оставаясь намного больше типичного расстояния между уровнями. В ТД пределе удобно ввести **плотность состояний** $\nu(E) = \text{Tr} \delta(E - \hat{H}) = \sum_a \delta(E - \varepsilon_a)$, тогда число состояний в узком энергетическом слое $W(E) \simeq \nu(E) \Delta E$, и $S \simeq \ln[\nu(E) \Delta E]$.

⁵В смысле неучёта квантовой тождественности — для простоты считаем, что частицы в задаче можно пронумеровать и отследить их эволюцию.

⁶Пример такой системы — цепочка локализованных невзаимодействующих электронов в магнитном поле, каждый из которых описывается гамильтонианом $\hat{H} = \mu_B B \hat{\sigma}_z$. Собственные значения этого гамильтониана $E_{\pm} = \pm \mu_B B$, тогда в наших обозначениях $\varepsilon = 2\mu_B B$ (начало отсчёта энергии выбрано таким образом, чтобы нижний уровень был нулевым).

В ТД пределе $N \gg 1$, и для вычисления энтропии $S = \ln W$ можно применить формулу Стирлинга $\ln N! \simeq N \ln N - N$.

$$\begin{aligned} S(E, N) &\simeq -N \left[\frac{N_1}{N} \ln \frac{N_1}{N} + \frac{N - N_1}{N} \ln \frac{N - N_1}{N} \right] \\ &= -N \left[\frac{E}{N\epsilon} \ln \frac{E}{N\epsilon} + \left(1 - \frac{E}{N\epsilon} \right) \ln \left(1 - \frac{E}{N\epsilon} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\beta\epsilon = \ln \left(\frac{N}{N_1} - 1 \right), \quad E = \frac{N\epsilon}{1 + \exp(\epsilon/T)}. \quad (12)$$

Можно выразить долю частиц в возбуждённом состоянии.

$$\frac{N_1}{N} = \frac{1}{1 + \exp(\epsilon/T)} \quad (13)$$

Видно, что $N_1/N (T \rightarrow +0) = 0$, т.е. при нуле все частицы в основном состоянии, и $N_1/N (T \rightarrow +\infty) = 1/2$, т.е. при большой температуре каждая частица с равной вероятностью будет либо в основном, либо в возбуждённом состоянии.

Замечание. Если задать $E > N\epsilon/2$, т.е. $N_1/N > 1/2$, то формально мы попадём в область **отрицательных температур** [см. §73 в [2]], в которой наблюдается **инверсия населённости** — более высокоэнергетичное состояние является более вероятным по сравнению с низкоэнергетичным⁷. При контакте с термостатом такая система будет отдавать ему тепло, при этом $\beta = 1/T$ проходит через нуль (в этот момент $T \rightarrow -\infty$ меняется на $T \rightarrow +\infty$), после чего система охладится до равновесия, как обычно.

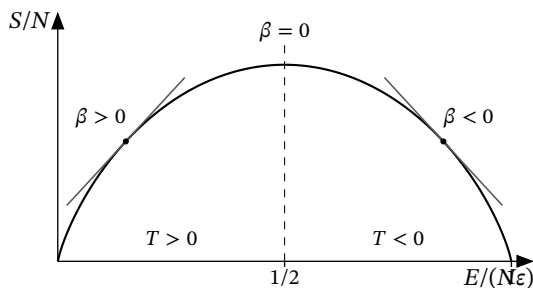


Рис. 1. Энтропия системы двухуровневых частиц. Наклон касательной равен $\epsilon\beta$: при $E > N\epsilon/2$ он отрицателен.

Выразите энтропию S через температуру T (избавившись при этом от N_1). Проверьте третье начало ТД. Найдите S при $T \rightarrow \infty$ и при $T \rightarrow -\infty$. Найдите теплоёмкость $C(T)$ и её асимптотики при $T \rightarrow 0$ и при $T \gg \epsilon$, нарисуйте график.

⁷В лабораторных условиях подобное может быть реализовано резким переворачиванием спинов.

5. Полимерная цепь

Рассмотрим «одномерную» цепь из $N + 1$ молекул. Каждая молекула связана с предыдущей сегментом, который может быть направлен либо вперёд, либо назад (энергетически направления эквивалентны, из чего следует, что внутренняя энергия $E(N)$ зависит только от N). Длина сегмента равна a , а разность координат между концом и началом цепи обозначим за L . Для малого изменения dL нужно совершить работу $\delta A = g dL$, где g — натяжение.

Найдите энтропию S и натяжение g .

Подсказка: для заданного числа сегментов $N = N_+ + N_-$ рассмотрите число способов взять N_+ из N .

6. Адсорбция полярных молекул

N двухатомных молекул локализованы на N различных адсорбционных центрах на поверхности металла с решёткой квадратной симметрии. Каждая молекула может либо лежать плашмя на поверхности, будучи ориентированной в одном из двух направлений x или y (энергия этих состояний 0), либо прикрепляться одним концом перпендикулярно поверхности вдоль z (это стоит энергии $\epsilon > 0$).

Вычислите статистический вес $W(E, N)$ и энтропию $S(E, N)$. Вычислите теплоёмкость $C(T)$ и нарисуйте график.

Подсказка: рассмотрите число способов выбрать N_z «торчащих» молекул из N . Не забудьте учесть комбинаторику оставшихся «лежащих» молекул.

7. Классический предел

В классическом пределе состояние системы задаётся фазовой точкой:

$$\alpha \rightarrow (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N) = (r^{3N}, p^{3N}). \quad (14)$$

Энергия состояния является функцией Гамильтона:

$$\mathcal{E}_\alpha \rightarrow H(r^{3N}, p^{3N}) = K(p^{3N}) + U(r^{3N}). \quad (15)$$

Фазовый объём тонкого энергетического слоя $E < H < E + \Delta E$ равен

$$\Delta\Gamma(E, V, N) = \int_{E < H < E + \Delta E} d\mathbf{r}^{3N} d\mathbf{p}^{3N}. \quad (16)$$

Малый, но конечный слой ΔE нужен, чтобы фазовый объём был ненулевым. Статистический вес получается делением фазового объёма на объём фазовой клетки⁸:

$$W(E, V, N) = \frac{\Delta\Gamma}{h^{3N}}, \quad h = 2\pi\hbar. \quad (17)$$

⁸Из правила квазиклассического квантования Бора–Зоммерфельда [§48 в [5]] следует, что площадь фазовой клетки, соответствующей одному квантовому состоянию, равняется $(\oint p dq)/n \simeq h = 2\pi\hbar$.

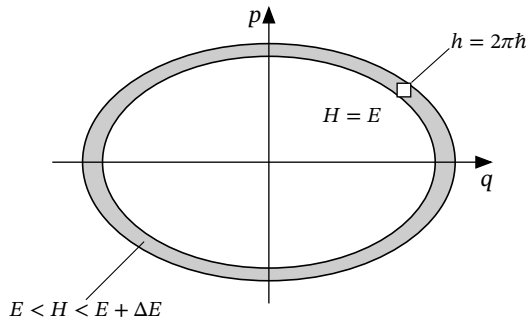


Рис. 2. Энергетический слой на фазовой плоскости одного осциллятора. Статвес W — число клеток площади h , помещающихся в слой.

Замечание. Для учёта квантовой тождественности (если частицы неразличимы) в классическом пределе статвес следует делить на $N!$ [§31 в [2]] (иначе энтропия не аддитивна — парадокс Гиббса, [§16 в [6]]):

$$W \rightarrow \frac{W}{N!}. \quad (18)$$

8. Идеальный газ Больцмана (задача)

Гамильтониан идеального газа объёма V есть просто сумма кинетических энергий N частиц:

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i^2}{2m}. \quad (19)$$

Координатная часть фазового объёма $\Delta\Gamma(E, V, N)$ есть просто V^N . Импульсная часть есть объём тонкого слоя (толщина которого определяется условием $E < H < E + \Delta E$) вблизи $3N$ -мерной гиперболы, заданной уравнением $\sum_i \mathbf{p}_i^2 = 2mE$, её радиус $R = \sqrt{2mE}$. Из выражения $dE = (\partial E / \partial R) dR$ получается толщина слоя $\Delta_R = \sqrt{m/(2E)} \Delta E$, а площадь d -мерной гиперболы равна $S_d = a_d R^{d-1}$, где a_d — d -мерный полный телесный угол.

Отступление. Для вычисления a_d применим искусственный приём⁹. Запишем гауссов интеграл в степени d :

$$I_d = \left[\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2} \right]^d = \pi^{d/2}. \quad (20)$$

С другой стороны

$$\begin{aligned} I_d &= \int \prod_{i=1}^d dx_i e^{-x_i^2} = \int dV_d \exp\left(-\sum_i x_i^2\right) \\ &= \int_0^\infty dR a_d R^{d-1} e^{-R^2} = \frac{a_d}{2} \int_0^\infty dy y^{\frac{d}{2}-1} e^{-y} = \frac{a_d}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right), \end{aligned} \quad (21)$$

где было использовано интегральное определение гамма-функции (не путать с фазовым объёмом!) $\Gamma(z) = \int_0^\infty dt t^{z-1} e^{-t}$, откуда

$$a_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}. \quad (22)$$

⁹Более наглядные рассуждения есть на канале 3Blue1Brown [7].

Зная площадь гиперсферы в импульсной части фазового пространства, для тождественных частиц получаем статистический вес

$$W(E, V, N) = \frac{1}{N!} \frac{V^N}{h^{3N}} \frac{(2\pi m)^{\frac{3N}{2}}}{\Gamma(\frac{3N}{2})} E^{\frac{3N}{2}-1} \Delta E. \quad (23)$$

На этом задача, в принципе, решена: энтропия находится по формуле Больцмана, $S = \ln W$, после чего её производные можно связать с ТД величинами через

$$dS = \frac{1}{T} dE + \frac{P}{T} dV - \frac{\mu}{T} dN. \quad (24)$$

В ТД пределе, оставляя $O(N)$ и $O(N \ln N)$ слагаемые и отбрасывая $O(\ln N)$, используя формулы Стирлинга $\ln N! \simeq N \ln N - N$ и $\ln \Gamma(x) \simeq x \ln x - x$, получите

$$S(E, V, N) \simeq N \ln \left(\frac{V}{N} \right) + \frac{3N}{2} \ln \left(\frac{4\pi m E}{3N h^2} \right) + \frac{5N}{2}. \quad (25)$$

Таким образом,

$$S(E, V, N) \simeq N \left[\ln \left(\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m E}{3N h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) + \frac{5}{2} \right], \quad (26)$$

что представляет собой **формулу Сакура–Тетроде**.

Теперь можно вычислить остальные ТД величины; дифференцировать переменные, находящиеся под логарифмом, очень просто — множитель всегда сокращается: $\partial/\partial x \ln(xy) = y/(xy) = 1/x$.

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E} \right)_{N,V} = \frac{3}{2} \frac{N}{E} \Rightarrow E = \frac{3}{2} NT \quad (27)$$

$$\frac{P}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_{N,E} = \frac{N}{V} \Rightarrow PV = NT \quad (28)$$

Мы получили известное выражение энергии идеального газа, а также знаменитое **уравнение состояния идеального газа Менделеева–Клапейрона**.

Вычислите химический потенциал μ идеального газа, используя формулу Сакура–Тетроде.

Легко видеть, что теплоёмкость классического газа на одну частицу

$$\frac{C_V}{N} = \frac{3}{2} \quad (29)$$

постоянна и не зависит от температуры.

Замечание. При $T \rightarrow 0$ формула Сакура–Тетроде даёт $S \rightarrow -\infty$, а C_V не стремится к нулю, что противоречит третьему началу. Очевидно, классические формулы в этом пределе в общем случае неверны; количественный критерий применимости классического предела мы выведем позже.

9. Распределение Максвелла (задача)

Вычислив статистический вес $W(E, V, N)$, мы нашли ТД характеристики идеального газа в целом. Информация о статистическом распределении отдельных частиц также может быть получена. Найдём, например, распределение по импульсам $\rho(\mathbf{p})$ одной выбранной частицы.

Для этого удобно использовать фазовый объём энергетического слоя $\Delta \Gamma_N$. Выберем одну частицу из N , тогда для оставшихся $N - 1$ частиц комбинаторный множитель, учитывающий их тождественность, равен $1/(N - 1)!$. Интегрируя микроканоническое распределение по координате выбранной частицы и по фазовому пространству остальных $N - 1$ частиц, получаем

$$\rho(\mathbf{p}_1) = \frac{1}{N} \frac{V}{h^3} \frac{W\left(E - \frac{p_1^2}{2m}, V, N-1\right)}{W(E, V, N)}. \quad (30)$$

Множитель $1/N$ компенсирует отношение $N!/(N-1)! = N$. Используя найденное ранее выражение для W , получаем

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{p}_1) &= V \frac{V^{N-1} (2\pi m)^{\frac{3(N-1)}{2}} \left(E - \frac{p_1^2}{2m}\right)^{\frac{3N-5}{2}} \Delta E}{\Gamma\left(\frac{3(N-1)}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}{V^N (2\pi m)^{\frac{3N}{2}} E^{\frac{3N-2}{2}} \Delta E} \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3(N-1)}{2}\right)} \frac{1}{(2\pi m E)^{\frac{3}{2}}} \left(1 - \frac{p_1^2}{2mE}\right)^{\frac{3N-5}{2}}, \end{aligned} \quad (31)$$

где $p_1^2 < 2mE$.

В ТД пределе $N \gg 1$, $E \propto N$ (далее индекс 1 у $\mathbf{p}_1$ опускаем):

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3(N-1)}{2}\right)} \simeq \left(\frac{3N}{2}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad \left(1 - \frac{p^2}{2mE}\right)^{\frac{3N-5}{2}} \simeq \exp\left(-3N \frac{p^2}{4mE}\right). \quad (32)$$

Поэтому

$$\rho(\mathbf{p}) = \left(\frac{3N}{4\pi mE}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-3N \frac{p^2}{4mE}\right). \quad (33)$$

Используя $E = 3NT/2$, окончательно получаем распределение Максвелла:

$$\rho(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi mT)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right). \quad (34)$$

10. Классические осцилляторы (задача)

Пусть есть N независимых классических *различимых* осцилляторов.

$$H = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x_i^2 \right] \quad (35)$$

Уравнение $E = H$ задаёт гиперэллипсоид в $2N$ -мерном пространстве, который может быть сведён к гиперсфере преобразованием координат $q'_i = \sqrt{m\omega} x_i$, $p'_i = p_i / \sqrt{m\omega}$ (проверьте, что якобиан этого преобразования единичный):

$$E = H(q'^N, p'^N) = \frac{\omega}{2} \sum_{i=1}^N (p_i'^2 + q_i'^2). \quad (36)$$

Мы могли бы, как в задаче об идеальном газе, вычислять объём тонкого энергетического слоя, однако в ТД пределе можно с той же точностью использовать объём всей области $H \leq E$. Это связано с т.н. *теоремой «о корке апельсина»*: в многомерном ($d \gg 1$) пространстве почти весь объём апельсина составляет его корка¹⁰. Для доказательства вычислим объёмную долю приповерхностного слоя толщиной $\varepsilon < 1$ в единичном шаре.

$$\frac{V_d(1) - V_d(1-\varepsilon)}{V_d(1)} = 1 - (1-\varepsilon)^d \xrightarrow{d \rightarrow \infty} 1 \quad (37)$$

Различие между энтропиями, определёнными через тонкий энергетический слой и через объём $H \leq E$, является субэкстенсивным и исчезает в ТД пределе.

¹⁰Корректное название — принцип концентрации меры; снова отсылаю к видео [7].

Объём d -мерного шара равен

$$V_d = \int_0^R dr a_d r^{d-1} = \frac{a_d}{d} R^d = \frac{2\pi^{d/2}}{d \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} R^d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} R^d. \quad (38)$$

Область $H \leq E$ представляет собой $2N$ -мерный шар радиуса $R = \sqrt{2E/\omega}$. С учётом $\Gamma(n+1) = n!$ его фазовый объём равен

$$\Gamma(E) = \frac{\pi^N}{N!} R^{2N} = \frac{\pi^N}{N!} \left(\frac{2E}{\omega}\right)^N. \quad (39)$$

Здесь фактор $1/N!$ возникает из объёма $2N$ -мерного шара и не связан с тождественностью осцилляторов (мы считаем их различимыми).

$$W(E) = \frac{\Gamma(E)}{h^N} = \frac{1}{N!} \left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^N \quad (40)$$

$$S = \ln W \simeq N \ln\left(\frac{eE}{N\hbar\omega}\right) \quad (41)$$

На этом задача решена — все ТД величины можно найти дифференцированием.

$$\frac{1}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_N = \frac{N}{E}, \quad E = NT, \quad C = N \quad (42)$$

Эти классические формулы, как и в случае идеального газа, верны при высокой $T \gg \hbar\omega$.

Найдите распределение $\rho(x, p)$ одного из осцилляторов. Рассмотрите предел $N \gg 1$.

Библиография

- [1] М. Садовский, *Лекции по статистической физике* (Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2003).
- [2] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Статистическая физика. Ч. 1*, 4-е изд., Т. 5 (Физматлит, М., 1995).
- [3] В. Киселёв, *Квантовая механика. Курс лекций* (МЦНМО, М., 2022).
- [4] J. M. Deutsch, Eigenstate Thermalization Hypothesis, *Reports on Progress in Physics* **81**, 82001 (2018).
- [5] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Квантовая механика (нерелятивистская теория)*, 5-е изд., Т. 3 (Физматлит, М., 2001).
- [6] И. П. Базаров, *Термодинамика*, 4-е изд. (Выш. шк., М., 1991).
- [7] G. Sanderson, *The most beautiful formula not enough people understand*, <https://www.youtube.com/watch?v=fsLh-NYhOoU>.