

Статистическая физика. Канонический ансамбль

В.Д. Кочев, 2026. <https://vdkochev.github.io>, vd.kochev@gmail.com

1. Канонический ансамбль (T, V, N)

Комбинаторные вычисления в микроканоническом ансамбле бывают довольно громоздки. Кроме того, точное фиксирование энергии E системы в большинстве экспериментов невозможно — для этого систему нужно идеально изолировать. На практике требуется описывать системы, находящиеся в тепловом равновесии со средой (большим энергетическим резервуаром, **термостатом**, «баней»). Совокупность «система+термостат» изолирована и описывается микроканоническим ансамблем, при этом термостат может обмениваться энергией с системой, и его температура T практически не меняется в силу его большого размера.

Формально рассмотрим изолированную систему (с энергией E_0), состоящую из малой подсистемы (в состоянии $|a\rangle$ с энергией $\mathcal{E}_a$) и большого термостата (с температурой $T = 1/\beta$). Энергия термостата $E_{\text{bath}} = E_0 - \mathcal{E}_a$, поэтому

$$\rho_a \propto W_{\text{bath}}(E_{\text{bath}}) = \exp S_{\text{bath}}(E_{\text{bath}}). \quad (1)$$

Поскольку $\mathcal{E}_a \ll E_0$, разложим $S_{\text{bath}}(E_{\text{bath}})$ около $E_{\text{bath}} = E_0$.

$$S_{\text{bath}}(E_0 + [-\mathcal{E}_a]) \simeq S_{\text{bath}}(E_0) - \left(\frac{\partial S_{\text{bath}}}{\partial E_{\text{bath}}} \right)_{E_{\text{bath}}=E_0} \mathcal{E}_a = S_{\text{bath}}(E_0) - \beta \mathcal{E}_a \quad (2)$$

Не зависящий от a множитель определяется нормировкой, откуда получаем формулу распределения в **каноническом** ансамбле (**распределения Гиббса**) — ансамбле систем с заданными (T, V, N) :

$$\rho_a = \frac{\exp(-\beta \mathcal{E}_a)}{Z}, \quad \hat{\rho} = \frac{\exp(-\beta \hat{H})}{Z}; \quad Z = \sum_a e^{-\beta \mathcal{E}_a} = \text{Tr} \exp(-\beta \hat{H}); \quad (3)$$

где нормировка $Z(T, V, N)$ называется **статистической суммой**¹.

Замечание. При наличии вырождения удобно суммировать не по состояниям, а по уровням энергии: если уровню $\mathcal{E}$ соответствует $g(\mathcal{E})$ состояний, то

$$Z = \sum_{\mathcal{E}} g(\mathcal{E}) \exp(-\beta \mathcal{E}). \quad (4)$$

Энтропия Гиббса:

$$S = -\langle \ln \hat{\rho} \rangle = -\sum_a \rho_a \ln \rho_a. \quad (5)$$

2. Свободная энергия $F(T, V, N)$. Схема $Z \rightarrow F \rightarrow C$

Получим связь свободной энергии F со статсуммой Z .

$$\begin{aligned} F = E - TS &= \sum_a \left(\rho_a \mathcal{E}_a + \frac{1}{\beta} \rho_a \ln \rho_a \right) = \\ &= \sum_a \left(\frac{1}{Z} \exp(-\beta \mathcal{E}_a) \mathcal{E}_a + \frac{1}{\beta Z} \exp(-\beta \mathcal{E}_a) \ln \left[\frac{\exp(-\beta \mathcal{E}_a)}{Z} \right] \right) = -T \ln Z \end{aligned} \quad (6)$$

$$F = -T \ln Z, \quad Z = \exp\left(-\frac{F}{T}\right) \quad (7)$$

Эту формулу иногда называют **основной формулой равновесной статистической механики** — для вычисления свободной энергии системы достаточно знать её энергетический спектр.

¹От немецкого *Zustandssumme* — сумма по состояниям.

Если удалось вычислить статсумму Z , то задача статфизики решена — ТД величины можно получить дифференцированием² свободной энергии F . Например, для нахождения C_V можно сначала найти энтропию $S = -\partial F/\partial T$, после чего $C_V = T\partial S/\partial T$.

Получите формулу (полезна для вычисления теплоёмкости):

$$E = \langle \mathcal{E} \rangle = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}. \quad (8)$$

3. Флуктуации энергии (задача)

В каноническом ансамбле энергия системы E не задана (в отличие от микроканонического ансамбля), вместо этого по общей схеме вычисляется её среднее $E = \langle \mathcal{E} \rangle$. Чтобы определить характерный масштаб σ_E **флуктуаций** энергии — случайных отклонений от среднего, вычислим дисперсию.

$$\begin{aligned} \sigma_E^2 &= \langle (\Delta \mathcal{E})^2 \rangle = \langle (\mathcal{E} - \langle \mathcal{E} \rangle)^2 \rangle = \langle \mathcal{E}^2 \rangle - \langle \mathcal{E} \rangle^2 = \\ &= \sum_a \frac{\exp(-\beta \mathcal{E}_a)}{Z} \mathcal{E}_a^2 - \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \frac{1}{Z^2} \left(\frac{\partial Z}{\partial \beta} \right)^2 = \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2} = -\frac{\partial E}{\partial \beta} = T^2 \frac{\partial E}{\partial T} \end{aligned} \quad (9)$$

Величина флуктуаций оказалась связана с теплоёмкостью — производной энергии по температуре.

$$\langle (\Delta \mathcal{E})^2 \rangle = T^2 C_V \quad (10)$$

Поскольку дисперсия неотрицательна, отсюда сразу следует ТД неравенство $C_V \geq 0$.

Отступление. Это частный случай общей связи флуктуаций с обобщённой восприимчивостью (статический аналог **флуктуационно-диссипационной теоремы**). Пусть $\delta A = \Lambda d\lambda$, где $\Lambda = \langle \hat{\Lambda} \rangle$, $\hat{\Lambda} = \partial \hat{H} / \partial \lambda$ не зависит от λ ($\hat{H}$ линеен по λ , и в квантовом случае $[\hat{H}, \hat{\Lambda}] = 0$). Тогда $\Lambda = (\partial F / \partial \lambda)_T$ [§15 в [1]], и, дифференцируя Λ по λ так же, как E по β выше, получаем

$$\sigma_\Lambda^2 = -T \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} \right)_T. \quad (11)$$

Так как E и C_V экстенсивны ($\propto N$),

$$\frac{\sigma_E}{E} = \frac{T\sqrt{C_V}}{E} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty). \quad (12)$$

Например, для идеального газа $\sigma_E/E = \sqrt{2/(3N)}$. В ТД пределе энергия практически не флуктуирует, поэтому канонический и микроканонический ансамбли эквивалентны (в смысле средних).

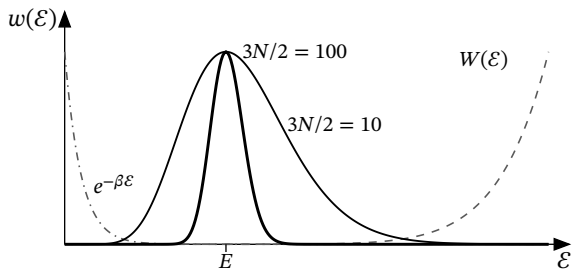


Рис. 1. Распределение по энергии $w(\mathcal{E}) \propto W(\mathcal{E})e^{-\beta \mathcal{E}}$ для $W \propto \mathcal{E}^{3N/2}$ (все кривые нормированы на максимум; пунктир — множители W и $e^{-\beta \mathcal{E}}$ при $3N/2 = 10$). Произведение быстро растущего W и быстро убывающего $e^{-\beta \mathcal{E}}$ даёт пик вблизи E относительной ширины $\propto N^{-1/2}$.

²В рамках конкретного ансамбля, в данном случае канонического T, V, N , можно не прописывать все переменные в частных производных, т.к. выбор ансамбля подразумевает выбор этих переменных, в данном случае $(\partial/\partial T)_{V,N}$.

4. Теорема о равномерном распределении (задача)

Покажем, что каждое квадратичное³ слагаемое $H_i(x_i) = \alpha x_i^2$ в классическом⁴ ансамбле даёт вклад $T/2$ в среднюю энергию E , а значит, вклад $1/2$ в теплоёмкость C .

$x_i \partial H / \partial x_i = 2H_i$. Усредним по Гиббсу:

$$\begin{aligned} \left\langle x_i \frac{\partial H}{\partial x_i} \right\rangle &= \frac{1}{Z} \int d\Gamma e^{-\beta H} x_i \partial H / \partial x_i = -\frac{T}{Z} \int d\Gamma x_i \frac{\partial}{\partial x_i} e^{-\beta H} \\ &= -\frac{T}{Z} \int \frac{d\Gamma}{dx_i} [x_i e^{-\beta H}]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{T}{Z} \int d\Gamma e^{-\beta H} = T, \end{aligned} \quad (13)$$

откуда $\langle H_i \rangle = T/2$, т.е. энергия поровну распределена по всем квадратичным степеням свободы.

5. Система двухуровневых частиц, снова (задача)

Микросостояние $a = \{n_1, \dots, n_N\}$, $n_i \in \{0, 1\}$, имеет энергию $\mathcal{E}_a = \varepsilon \sum_i n_i = \varepsilon \mathcal{N}_1$.

Сумма по микросостояниям — это N независимых сумм, по одной на каждое n_i :

$$Z = \sum_a e^{-\beta \mathcal{E}_a} = \sum_{n_1 \in \{0,1\}} \dots \sum_{n_N \in \{0,1\}} \prod_{i=1}^N e^{-\beta \varepsilon n_i} = \prod_{i=1}^N \sum_{n_i \in \{0,1\}} e^{-\beta \varepsilon n_i} = (1 + e^{-\beta \varepsilon})^N. \quad (14)$$

Тот же ответ получается суммированием по уровням системы с учётом вырождения. Кратность уровня $\mathcal{E} = \varepsilon \mathcal{N}_1$ равна $g_{\mathcal{N}_1} = \binom{N}{\mathcal{N}_1} = \frac{N!}{\mathcal{N}_1!(N-\mathcal{N}_1)!}$ — это в точности статвес⁵ $W(E = \mathcal{E}, N)$ в терминах микроканонического ансамбля.

$$Z = \sum_{\mathcal{N}_1=0}^N \binom{N}{\mathcal{N}_1} e^{-\beta \varepsilon \mathcal{N}_1} = 1 + N e^{-\beta \varepsilon} + \frac{N(N-1)}{2} e^{-2\beta \varepsilon} + \dots + e^{-N\beta \varepsilon} = (1 + e^{-\beta \varepsilon})^N. \quad (15)$$

Здесь бином Ньютона $(a+b)^N = \sum_k \binom{N}{k} a^{N-k} b^k$ при $a=1$, $b=e^{-\beta \varepsilon}$. Канонический ансамбль избавляет от комбинаторики: вместо подсчёта W и формулы Стирлинга достаточно одной частицы. Факторизация $Z = Z_1^N$ — общее свойство невзаимодействующих *различимых*⁶ частиц; фактически она позволяет находить статсумму одной частицы и возводить результат в степень N .

Удобно сдвинуть начало отсчёта⁷ энергии на $-\varepsilon/2$, чтобы уровни стали $\pm \varepsilon/2$. При этом Z умножается на $e^{\beta N \varepsilon/2}$, а E и F сдвигаются на $-N\varepsilon/2$.

$$Z_1 = e^{-\beta \varepsilon/2} + e^{\beta \varepsilon/2} = 2 \operatorname{ch}(\beta \varepsilon/2), \quad E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z = -\frac{N\varepsilon}{2} \operatorname{th}\left(\frac{\varepsilon}{2T}\right) \quad (16)$$

Энергия i -й частицы равна $-\varepsilon/2 + \varepsilon n_i$, поэтому

$$E = \left\langle \sum_{i=1}^N \left(-\frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon n_i \right) \right\rangle = -\frac{N\varepsilon}{2} + \varepsilon N_1, \quad N_1 = \langle \mathcal{N}_1 \rangle. \quad (17)$$

Отсюда средняя населённость верхнего уровня

³Вообще говоря, для квадратичной формы с перекрёстными членами верно $\langle H \rangle = fT/2$, где f — число степеней свободы, что следует из $\sum_i x_i \partial H / \partial x_i = 2H$ [§44 в [1]].

⁴Как и в микроканоническом случае, сумма по состояниям заменяется интегралом по фазовому объёму, делённому на объём фазовой клетки (и на $N!$ для тождественных частиц): $Z = \int d\Gamma / (N! h^{3N}) e^{-\beta H}$. В средних этот множитель сокращается.

⁵В общем случае $Z(\beta) = \sum_{\mathcal{E}} W(\mathcal{E}) e^{-\beta \mathcal{E}}$ — дискретное преобразование Лапласа от W (для непрерывного спектра — интеграл $\int dE \nu(E) e^{-\beta E}$ с плотностью состояний ν). Обратное преобразование $W(E) \sim \int d\beta e^{\beta E} Z(\beta) / (2\pi i)$ по прямой, параллельной мнимой оси, при $N \gg 1$ берётся методом перевала, откуда $S(E) = \ln W \simeq \min_{\beta} [\beta E + \ln Z(\beta)] = (E - F)/T$ с точностью до $O(\ln N)$. Это преобразование Лежандра, аналогичное переходу $E \rightarrow F$ в ТД: так эквивалентность ансамблей получается формально [§4.6 в [2]].

⁶Для тождественных частиц в классическом пределе $Z = Z_1^N / N!$.

⁷Вернувшись к исходной формулировке задачи про спин в магнитном поле.

$$\frac{N_1}{N} = \frac{E + N\epsilon/2}{N\epsilon} = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{th} \left(\frac{\epsilon}{2T} \right) \right] = \frac{1}{1 + e^{\epsilon/T}}, \quad (18)$$

что согласуется с микроканоническим результатом.

Найдите F , μ , S и C . Проверьте третье начало ТД и найдите S при $T \rightarrow \infty$. Найдите асимптотики C при $T \ll \epsilon$ и $T \gg \epsilon$. Постройте графики $E/(N\epsilon)$, S/N и C/N как функции T/ϵ . Продолжите графики в область $T < 0$ (статсумма конечна, так как спектр ограничен сверху).

Дополнительно: найдите положение максимума $C(T)$ (аномалия Шоттки; уравнение решите численно).

Замечание. Теорема о равнораспределении здесь неприменима. У двухуровневой частицы нет непрерывной переменной, от которой энергия зависит квадратично: спектр дискретен и ограничен сверху. Поэтому при $T \gg \epsilon$ теплоёмкость стремится к нулю, а не к константе.

6. Квантовые осцилляторы

Рассмотрите систему N независимых различных гармонических осцилляторов. Энергия осциллятора в состоянии n задаётся выражением $\mathcal{E}_n = \hbar\omega(n + 1/2)$; $n = 0, 1, 2, \dots$ Найдите Z, F, μ, S, C . Проверьте третье начало ТД. Найдите C при $T \ll \hbar\omega$; и при $T \gg \hbar\omega$ с первой температурной поправкой. Проверьте теорему о равнораспределении в классическом пределе.

7. Частица в бесконечной яме (задача)

Для частицы массы m в одномерной бесконечной яме ширины L

$$\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_1 n^2, \quad \mathcal{E}_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}, \quad (19)$$

статсумма

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\beta \mathcal{E}_1 n^2). \quad (20)$$

Отступление. Формула Эйлера–Маклорена [§9.5 в [3]] позволяет заменить сумму значений гладкой функции (если $f(x)$ и её производные стремятся к нулю при $x \rightarrow \infty$) интегралом с систематически вычисляемыми поправками:

$$\sum_{n=a}^b f(n) = \int_a^b f(x) dx + \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^M \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) + R_M. \quad (21)$$

Здесь B_n — **числа Бернулли** [§6.5 в [3]], а R_M — остаток.

Первые значения:

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}, \quad \dots \quad (22)$$

Числа Бернулли можно последовательно находить из

$$\sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k = \sum_{k=0}^n \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} B_k = 0, \quad n \geq 1. \quad (23)$$

Например,

$$1 + 2B_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad (24)$$

$$1 + 3B_1 + 3B_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad B_2 = \frac{1}{6}. \quad (25)$$

Воспользуемся формулой Эйлера–Маклорена.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(x) dx - \frac{f(0)}{2} - \frac{f'(0)}{12} + \dots \quad (26)$$

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} f(n), \quad f(n) = \exp(-\beta \varepsilon_1 n^2). \quad (27)$$

При $T \gg \varepsilon_1$, поскольку

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = f''(0) = \dots = 0, \quad (28)$$

формула Эйлера–Маклорена даёт

$$Z = \sqrt{\pi \frac{T}{4\varepsilon_1}} - \frac{1}{2} + \dots, \quad E = \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 T}{\pi}} + \dots, \quad C_V = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\pi T}} + \dots \quad (29)$$

Главный член согласуется с теоремой о равномерном распределении. Поскольку все нечётные производные f в нуле равны нулю, остальные поправки экспоненциально малы.

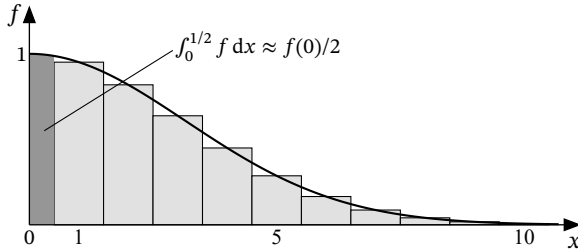


Рис. 2. Сумма $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ — площадь столбиков единичной ширины; интеграл $\int_0^{\infty} f(x) dx$ больше, чем площадь под кривой, т.е. примерно на $f(0)/2$. Здесь $\beta \varepsilon_1 = 1/20$.

8. Квантовый ротатор

Рассмотрите линейный жёсткий ротатор (двухатомную гетеромолекулу) с моментом инерции I . Его уровни энергии и их кратности вырождения равны

$$\varepsilon_l = \frac{\hbar^2}{2I} l(l+1), \quad g_l = 2l+1, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (30)$$

При $T \gg \hbar^2/(2I)$ с помощью формулы Эйлера–Маклорена найдите первую температурную поправку к теплоёмкости $C = 1 + \alpha/T^2$. Сколько членов формулы нужно удержать? Сравните с теоремой о равномерном распределении.

9. Неидеальный газ. Конфигурационный интеграл. Идеальный газ Больцмана, снова (задача)

Напомним, что в классическом пределе $\sum_a \rightarrow 1/(N!h^{3N}) \int dr^{3N} \int dp^{3N}$, и статсумма равна

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}} \int dr^{3N} \int dp^{3N} \exp[-\beta H(r^{3N}, p^{3N})]. \quad (31)$$

При $H = K(p^{3N}) + U(r^{3N})$ она факторизуется на статистический интеграл⁸ идеального газа Z_{id} (по импульсам) и **конфигурационный интеграл** Z_{conf} (по координатам):

$$Z = Z_{\text{id}} Z_{\text{conf}}, \quad Z_{\text{id}} = \frac{V^N}{N!h^{3N}} \left[\int d^3 \mathbf{p} e^{-\beta p^2/(2m)} \right]^N = \frac{Z_1^N}{N!}, \quad Z_{\text{conf}} = \frac{1}{V^N} \int dr^{3N} e^{-\beta U(r^{3N})}. \quad (32)$$

⁸Это классический предел суммы по уровням частицы в яме; замена суммы интегралом верна при $T \gg \hbar^2/mL^2$.

Z_{conf} учитывает взаимодействие частиц (вычислим его позже для газа Ван-дер-Ваальса); для идеального газа $Z_{\text{conf}} = 1$. Гауссов интеграл:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (33)$$

для Z_1 (статсуммы одной частицы) даёт

$$Z_1 = \frac{V}{h^3} (2\pi mT)^{3/2} = V \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}. \quad (34)$$

По формуле Стирлинга

$$F_{\text{id}} = -T \ln Z_{\text{id}} \simeq -NT \ln \left[\frac{eV}{N} \left(\frac{mT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (35)$$

Дифференцированием F_{id} получаются уравнение Менделеева–Клапейрона, формула Сакура–Тетрода и μ — те же, что и в микроканоническом ансамбле.

10. Распределение Максвелла

Как и статинтеграл, распределение Гиббса $\propto e^{-\beta H}$ факторизуется на импульсную и координатную части, а импульсная — ещё и по частицам. Импульс одной частицы распределён по Максвеллу (мы уже выводили это выражение в микроканоническом ансамбле):

$$dw = \rho(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p}, \quad \rho(\mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi mT)^{3/2}} e^{-p^2/(2mT)} = \prod_{i=x,y,z} \frac{1}{\sqrt{2\pi mT}} e^{-p_i^2/(2mT)}. \quad (36)$$

Для вычисления средних используем метод дифференцирования интеграла по параметру.

10.1. Средние по Максвеллу (задача)

Найдём $\langle p^2 \rangle$ двумя способами.

Способ 1. В сферических координатах:

$$\langle p^2 \rangle = \frac{4\pi}{(2\pi mT)^{3/2}} \int_0^{\infty} dp p^4 e^{-p^2/(2mT)} = \frac{4\pi}{(2\pi mT)^{3/2}} \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{\pi}}{4} (2mT)^{5/2} = 3mT, \quad (37)$$

где интеграл был взят двумя дифференцированиями по параметру $\alpha = 1/(2mT)$, и учтены пределы.

Способ 2. Покомпонентно $\langle p^2 \rangle = 3\langle p_x^2 \rangle$, а для одной компоненты достаточно одного дифференцирования по α .

Ответ согласуется с теоремой о равнораспределении: $\langle p^2/(2m) \rangle = 3T/2$.

Найдите $\langle p \rangle = \langle |\mathbf{p}| \rangle$. Получите распределения по модулю импульса dw/dp и по энергии $dw/d\varepsilon$ для $\varepsilon = p^2/2m$. Найдите наиболее вероятные p_{prob} и $\varepsilon_{\text{prob}}$, сравните их со средними и между собой. Почему $\varepsilon_{\text{prob}} \neq p_{\text{prob}}^2/2m$?

11. Распределение Больцмана по координатам

Координатная часть распределения Гиббса $\propto e^{-\beta U(r^{3N})}$ в общем случае не факторизуется: взаимодействие частиц связывает их координаты. Для идеального газа во внешнем поле $U = \sum_{i=1}^N u(\mathbf{r}_i)$ она факторизуется по частицам, и координата одной частицы подчиняется **распределению Больцмана по координатам**:

$$dw = \rho(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}, \quad \rho(\mathbf{r}) = \frac{e^{-u(\mathbf{r})/T}}{\int d^3\mathbf{r} e^{-u(\mathbf{r})/T}}. \quad (38)$$

Соответственно, $Z_{\text{conf}} = \left[V^{-1} \int d^3\mathbf{r} e^{-u(\mathbf{r})/T} \right]^N$, а плотность числа частиц $dN/dV = N\rho(\mathbf{r})$. Импульсы при этом по-прежнему распределены по Максвеллу, независимо от $u(\mathbf{r})$.

11.1. Газ в поле тяжести (задача)

Идеальный газ из N частиц находится в вертикальном сосуде высотой L с площадью дна A в поле тяжести $u = mgz$. Распределение по высоте

$$\rho(z) = \frac{e^{-mgz/T}}{\int_0^L dz e^{-mgz/T}} = \frac{mg/T}{1 - e^{-mgL/T}} e^{-mgz/T}. \quad (39)$$

Давление на высоте z находим из уравнения состояния для тонкого слоя, $P(z) = T dN/dV = (NT/A)\rho(z)$, откуда **барометрическая формула**:

$$P(z) = P(0)e^{-mgz/T}. \quad (40)$$

Средняя высота частицы:

$$\langle z \rangle = \int_0^L dz z \rho(z) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln \int_0^L dz e^{-\alpha z} \Big|_{\alpha=mg/T} = \frac{T}{mg} - \frac{L}{e^{mgL/T} - 1}. \quad (41)$$

Здесь снова сработало дифференцирование по параметру: $\int_0^L dz e^{-\alpha z} = (1 - e^{-\alpha L})/\alpha$.

Предельные случаи. При $T \gg mgL$ поле слабо, газ заполняет сосуд почти однородно: $\langle z \rangle \simeq L/2 - mgL^2/(12T)$. При $T \ll mgL$ сосуд фактически бесконечен, и $\langle z \rangle \simeq T/(mg)$ не зависит от L . Наиболее вероятная высота $z_{\text{prob}} = 0$, так как $\rho(z)$ монотонно убывает.

Найдите $P(0)$ и $P(L)$. Найдите теплоёмкость газа C_V (при фиксированной высоте сосуда). Рассмотрите пределы $T \gg mgL$ и $T \ll mgL$. Почему при $T \ll mgL$ на каждую частицу приходится дополнительная единица? Подсказка: выведите аналог теоремы о равномерном распределении для линейного потенциала.

Библиография

- [1] Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика. Статистическая физика. Ч. 1*, 4-е изд., Т. 5 (Физматлит, М., 1995).
- [2] М. Kardar, *Statistical Physics of Particles* (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).
- [3] Р. Грэхем, Д. Кнут, и О. Паташник, *Конкретная математика. Основание информатики* (Мир, М., 1998).